

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde et mort le 19 février 1897 à Berlin, Il a étudié les mathématiques à l'université de Münster et obtint une chaire à l'Université technique de Berlin. Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Ce surnom est dû à la rigueur nouvelle qu'il a imposé : qu'a-t-on, et que n'a-t-on pas le droit de faire en analyse.

Son père était inspecteur des impôts et père de 4 enfants. Dès le lycée, Karl Weierstrass développera des compétences mathématiques très intéressantes. Malgré ces compétences son père va le forcer à suivre pendant 4 ans des études de droits et d'économie mais Weierstrass va ressortir sans aucun diplôme de l'université de Bonn. Ainsi, son père va accepter de financer 2 nouvelles années d'études à l'Académie théologique et philosophique de Munster dans le but que Weierstrass est les diplômes nécessaire au professorat dans le milieu secondaire. C'est à Munster qu'il va rencontrer Guddermann, mathématicien allemand qui deviendra son maître de mathématiques.

Karl Weierstrass devient donc professeur dans le secondaire en 1842 mais il effectuera ses recherches sur les fonctions elliptiques seul : les quelques articles qu'il publie dans le journal de son école sont ignorés par ces collègues et les mathématiciens. Ce n'est donc que 12 ans plus tard (1854) qu'il deviendra célèbre grâce au Journal de Crelle et à son article « Zur Theorie des Abelschen Functionen » dans lequel il publie l'essentiel de ses découvertes pendant les 15 dernières années. C'est ainsi qu'il deviendra docteur honoris de l'université de Königsberg et obtient une chaire à Berlin.

L'Université de Berlin, où se côtoient Weierstrass, Kummer et Kronecker, devient alors la plus prestigieuse du monde dans le domaine des mathématiques. Aux cours très réputés de Weierstrass se pressent les meilleurs étudiants européens. Parmi eux, il y a Sonia Kowalevskaya (future grande mathématicienne russe), que Weierstrass instruit à part car elle n'a pas le droit de s'inscrire à l'Université. Il contribuera énormément à ce qu'elle puisse obtenir le titre de docteur de l'Université de Göttingen, et un poste à Stockholm.

Sa fin de vie est dure : dès 1850 il souffre de problèmes de santé, en 1861 il recevra une attaque qui l'obligera à dicter ses cours assis. De plus, en 1877 il s'opposera violemment à son ami mathématicien Kronecker au sujet de découvertes de Georg Cantor et Sonia Kowalevskaya va décéder en 1891 ce qui l'affectera beaucoup. Il passe les trois dernières années de sa vie en fauteuil roulant et s'éteint à Berlin à la suite d'une pneumonie en 1897.

Ses principales œuvres mathématiques

1 L'œuvre mathématique de Weierstrass a débuté par la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques : il donne une théorie complète de l'inversion des intégrales hyperelliptiques. C'est aussi lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable (une fonction numérique qui est régulière du point de vue topologique c'est-à-dire continue mais ne l'est pas du tout du point de vue du calcul différentiel c'est-à-dire qu'elle n'est dérivable en aucun point) ce qui choquera beaucoup l'intuition des analystes de l'époque.

Le 18 juillet 1872, Weierstrass exposa à l'Académie royale des sciences de Berlin l'exemple d'une fonction continue partout et dérivable nulle part, appelée aujourd'hui fonction de Weierstrass, qu'il enseignait dans ses cours depuis 1861. Il causa ainsi une grande surprise dans le monde mathématique : on croyait d'ordinaire qu'une fonction continue en tout point est nécessairement dérivable sauf peut-être en quelques points.

Il s'agit en fait d'une famille de fonctions, définie comme ci-dessous :

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

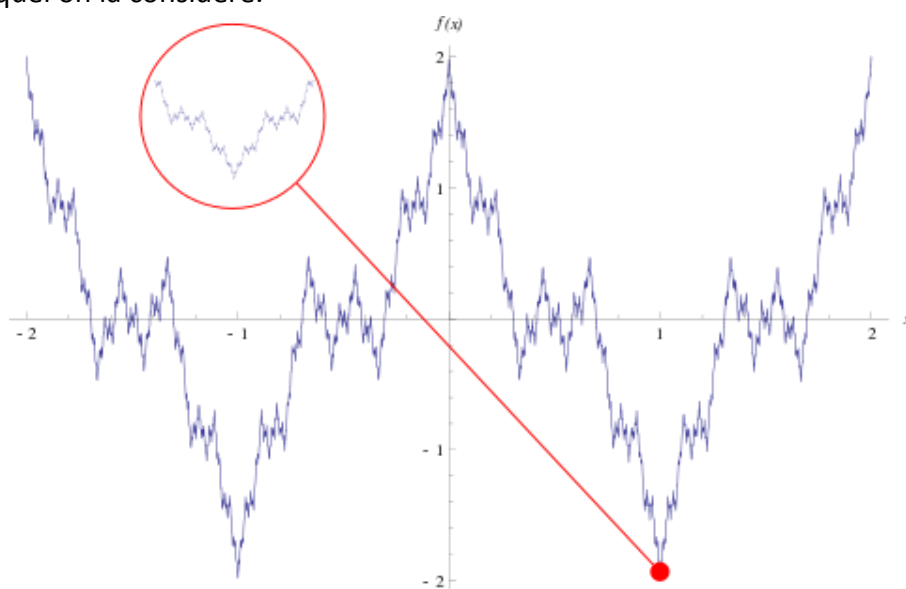
où $0 < a < 1$ et

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Weierstrass supposait de plus **b** entier impair.

L'hypothèse **ab ≥ 1** suffit pour qu'elle ne soit dérivable en aucun point, mais la preuve est sensiblement plus difficile.

Un des intérêts de cette fonction est ses caractéristiques similaires aux fractales dans le sens où elle a une complexité uniforme et infinie, indépendamment du facteur d'échelle avec lequel on la considère.



2

Mais Karl Weierstrass est aussi connu pour sa volonté d'algébrisation de l'analyse. Les principes de la théorie des fonctions doivent reposer selon lui sur des principes algébriques clairs. Mais à cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës, d'où la nécessité de nouvelles définitions. C'est pourquoi il donne les premières définitions claires et rigoureuses des nombres réels et de la continuité.

En 1861, Weierstrass définit la continuité comme ci-dessous :

f est continue en x_0 si, pour tout réel ϵ strictement positif, il existe un réel δ strictement positif tel que, si x est à une distance de x_0 strictement inférieure à δ , alors la valeur de la fonction f en x est à une distance strictement inférieure à ϵ de la valeur de la fonction f en x_0 .

Ce qui donne sous forme symbolique :

$$f \in C^0(x_0) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Weierstrass formula également une définition de la limite et de la dérivée en (ϵ, δ) , telle qu'elle est enseignée généralement aujourd'hui.

Avec ces nouvelles définitions, il put donner des démonstrations rigoureuses de plusieurs théorèmes qui reposent sur des propriétés des nombres réels jusqu'alors tenues pour intuitives, tels le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Borel-Lebesgue. Il a aussi contribué grandement à la théorie des fonctions analytiques, qu'il définit comme somme de puissances convergentes à l'intérieur d'un disque (les séries entières). Il s'en sert pour démontrer les théorèmes de dérivation terme à terme : c'est le principe du prolongement analytique.

3

Pour finir, il fit aussi des avancées significatives dans le champ du calcul des variations. En utilisant les outils de l'analyse que nous venons de citer, Weierstrass put reformuler complètement la théorie, ce qui ouvrit la voie à l'étude moderne du calcul des variations. Karl Weierstrass établit par exemple une condition nécessaire à l'existence d'un extremum global de problèmes variationnels. Il contribua à l'expression de la condition de Weierstrass-Erdmann qui donne les conditions suffisantes pour qu'un extremum ait un coin.

La condition dit que, le long d'un extrême $x(t)$ lisse à l'état de morceau (c'est-à-dire un extrême qui est lisse sauf à un nombre fini de coins) pour une intégrale $J = \int f(t, x, y) dt$

la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ doit être continue à un angle T. C'est-à-dire, si l'on prend la limite des partiels des deux côtés du coin lorsque l'on s'approche du coin T, le résultat doit être la même réponse.

La condition permet de prouver qu'un coin existe le long d'un extrême donné. En conséquence, il existe de nombreuses applications à la géométrie différentielle. Dans les calculs de la Weierstrass E-Function, il est souvent utile de trouver où les coins existent le long des courbes. De même, la condition permet de trouver une courbe de minimisation pour une intégrale donnée.